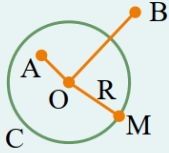


مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

وضعیت یک نقطه نسبت به دایره:



الف نقطه A درون دایره $C(O, R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OA < R$ باشد.

ب نقطه M روی دایره $C(O, R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OM = R$ باشد.

پ نقطه B بیرون دایره $C(O, R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OB > R$ باشد.

وضعیت یک خط نسبت به دایره:

اوضاع خط و دایره

متقاطع	مماس	مقاطع
$OH > r$	$OH = r$	$OH < r$
تعداد نقاط اشتراک = ۰	تعداد نقاط اشتراک = ۱	تعداد نقاط اشتراک = ۲

وتر در دایره:

الف در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.

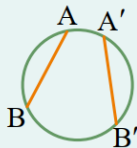
ب در هر دایره، اگر یک قطر، وتری از آن دایره را نصف کند، آن گاه بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می کند.

پ در هر دایره، اگر یک قطر، کمانی از آن دایره را نصف کند، آن گاه بر وتر نظیر آن قطر عمود بوده و آن را نصف می کند.

ویژگی های وتر:

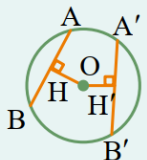
الف در یک دایره، دو وتر برابر یکدیگرند، اگر و تنها اگر کمان های آنها برابر باشند.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow AB = A'B'$$



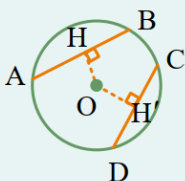
ب در یک دایره، دو وتر برابر یکدیگرند، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آنها برابر باشد.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$



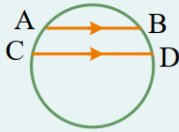
از دو وتر نامساوی در دایره، آن که بزرگتر است، کمان بزرگتر دارد و به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس. در شکل زیر اگر $AB > CD$ ، آن گاه:

$$AB > CD \Leftrightarrow AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$



کمان های محصور بین دو وتر موازی:

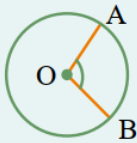
دو وتر از یک دایره موازی اند، اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشد.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow AC = BD$$

زاویه مرکزی:

زاویه مرکزی، زاویه ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و دو ضلع آن شعاع های دایره هستند و اندازه این زاویه برابر با کمان روبه روی آن است.



$$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$$

مثال:

شکل روبرو را در نظر بگیرید. نقطه O مرکز دایره است.

الف: اگر $y = 90^\circ$ باشد، مقدار x را بیابید.

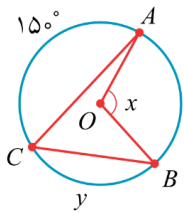
پاسخ:

$$AB = 360^\circ - (150^\circ + 90^\circ) = 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$$

ب: اگر $x = 110^\circ$ باشد، مقدار y را بیابید.

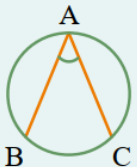
پاسخ:

$$x = 110^\circ \Rightarrow AB = 110^\circ \Rightarrow y = 360^\circ - (150^\circ + 110^\circ) = 100^\circ$$



زاویه محاطی:

زاویه ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند. اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان روبه روی آن است.



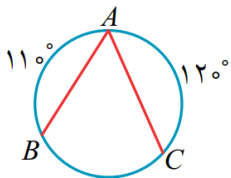
$$\hat{A} = \frac{BC}{2}$$

مثال:

در دایره شکل مقابل، اندازه زاویه $\hat{A}$ را بدست آورید.

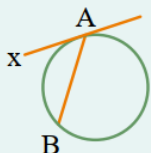
پاسخ:

$$\widehat{BC} = 360^\circ - (120^\circ + 110^\circ) = 130^\circ \Rightarrow \hat{A} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$



زاویه ظلی:

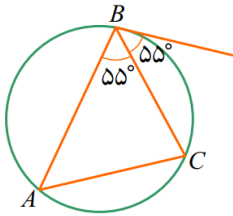
زاویه ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن شامل وتر و دیگری آن مماس بر دایره است. اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف اندازه کمان روبه روی آن است.



$$\hat{BAx} = \frac{AB}{2}$$

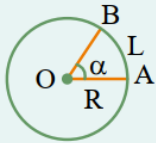


مثال:

در شکل مقابل اندازه کمان $\widehat{ACB}$ را بدست آورید.پاسخ: $\widehat{B} = 55^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 110^\circ$ و $\widehat{B} = 55^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 110^\circ$ زاویه محاطی

$$\widehat{ACB} = \widehat{AC} + \widehat{BC} = 110^\circ + 110^\circ = 220^\circ$$

طول کمانی از دایره:



طول یک کمان با اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان، رابطه مستقیم دارد. در شکل مقابل، اگر L اندازه کمان AB باشد، داریم: (alpha بر حسب درجه است.)

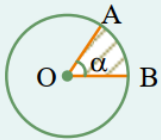
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

مثال:

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{L}{2 \times \pi \times 3} \Rightarrow L = 2\pi$$

در دایره ای به شعاع ۳ طول مقابل به کمان 120° چقدر است؟ پاسخ:

مساحت قطاعی از دایره:



مساحت یک قطاع با اندازه زاویه مرکزی آن قطاع، رابطه مستقیم دارد. در شکل مقابل، اگر S مساحت قطاع هاشور خورده باشد، داریم: (alpha بر حسب درجه است.)

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{S}{\pi R^2} \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

مثال:

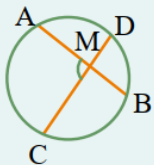
اندازه کمانی بر حسب درجه در یک دایره به شعاع ۶ سانتی متر، 40° است. مساحت قطاع محدود به کمان را محاسبه کنید.

$$\frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{S}{6^2 \pi} \Rightarrow S = 4\pi$$

پاسخ:

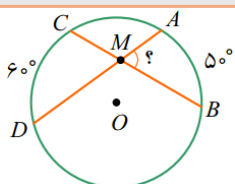
زاویه بین دو وتر:

اگر دو وتر AB و CD در نقطه M درون دایره متقاطع باشند، آنگاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{AC + BD}{2}$$

مثال:

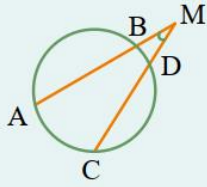
در شکل مقابل با توجه به اندازه‌های داده شده اندازه زاویه $\hat{M}$ را بدست آورید.

$$\hat{M} = \frac{60^\circ + 50^\circ}{2} = 55^\circ$$

پاسخ:

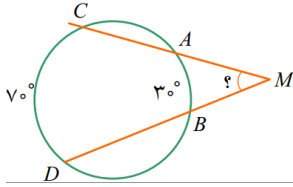
زاویه بین امتداد دو وتر:

اگر دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع کنند، آن گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{AC - BD}{2}$$

مثال:



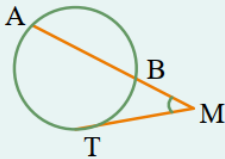
در شکل مقابل با توجه به اندازه های داده شده اندازه زاویه $\hat{M}$ را بدست آورید.

$$\hat{M} = \frac{70^\circ - 30^\circ}{2} = 20^\circ$$

پاسخ:

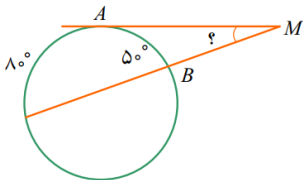
زاویه بین مماس و امتداد یک وتر:

اگر امتداد وتر AB، خط مماس بر دایره را در نقطه M قطع کند، آن گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{AT - BT}{2}$$

مثال:



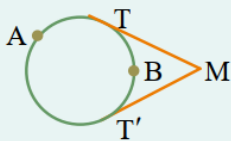
در شکل مقابل با توجه به اندازه های داده شده اندازه زاویه $\hat{M}$ را بدست آورید.

$$\hat{M} = \frac{80^\circ - 50^\circ}{2} = 15^\circ$$

پاسخ:

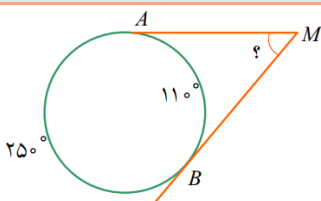
زاویه بین دو مماس:

اگر از نقطه M، دو مماس MT و MT' را بر دایره رسم کنیم، آن گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{TAT' - TBT'}{2}$$

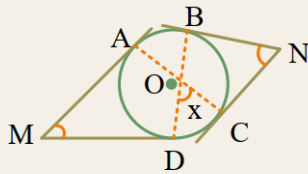
مثال:



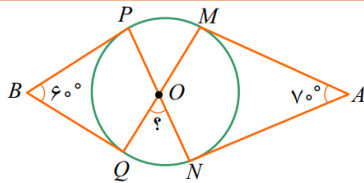
در شکل مقابل با توجه به اندازه های داده شده اندازه زاویه $\hat{M}$ را بدست آورید.

$$\hat{M} = \frac{250^\circ - 110^\circ}{2} = 70^\circ$$

پاسخ:

توجه: در شکل مقابل، زاویه x میانگین زاویه $\hat{M}$ و $\hat{N}$ است.

$$x = \frac{\hat{M} + \hat{N}}{2}$$

مثال: در شکل مقابل با توجه به اندازه های داده شده اندازه زاویه $\widehat{QON}$ را بدست آورید.

$$\widehat{M} = \frac{60^\circ + 70^\circ}{2} = 65^\circ$$

پاسخ:

تعریف ها و جملات مهم

اوضاع نسبی خط و دایره: در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می شود خط بر دایره **مماس** است.

در حالتی که خط و دایره **دو نقطه** اشتراک داشته باشند خط و دایره **مقاطع** هستند در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می نامیم.

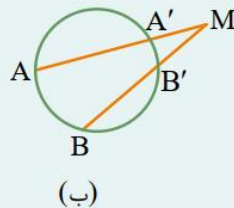
* یک خط و یک دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن نقطه **عمود** باشد.

قطاع: ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک **قطاع** می نامند.

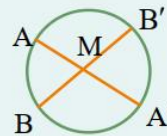
رابطه های طولی در دایره

وترهای متقاطع: 

اگر دو وتر درون دایره یا امتداد دو وتر در بیرون دایره، متقاطع باشند، آن گاه حاصل ضرب دو قطعه یک وتر با حاصل ضرب دو قطعه وتر دیگر برابر است.

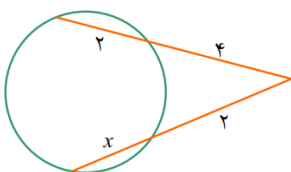


(ب)

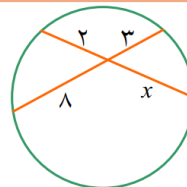


(الف)

$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

مثال: 

$$2(x + 2) = 4 \times (4 + 2) \Rightarrow x = 10$$

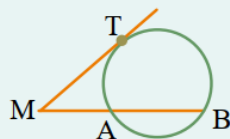


$$2x = 3 \times 8 \Rightarrow x = 12$$



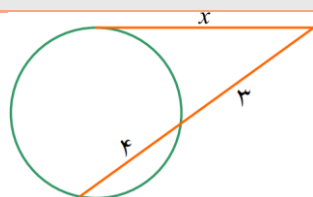
قاطع و مماس:

اگر از یک نقطه خارج دایره ای، مماس و قاطعی بر دایره رسم شود، آنگاه مربع طول مماس با حاصل ضرب دو قطعه قاطع برابر است.



$$MT^2 = MA \times MB$$

مثال:



$$x^2 = 3 \times 4 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

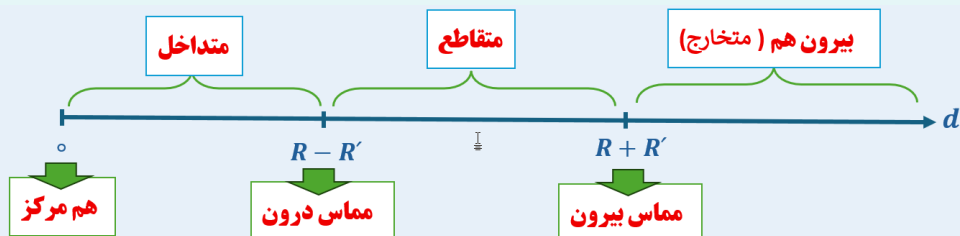
حالت های دو دایره نسبت به هم:

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $OO' = d$ در نظر می گیریم. حالت های مختلفی که این دو دایره می توانند نسبت به هم داشته باشند، به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$ R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R' $	دو دایره مماس درون
	$d < R - R' $	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم مرکز



حالت های دو دایره نسبت به هم در یک نگاه

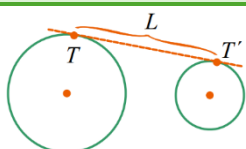


مماس مشترک دو دایره:



وضعیت	متخارج	مماس خارج	مقاطع	مماس داخل	متداخل
شکل					
تعداد مماس مشترک های داخلی	۲	۱	۰	۰	۰
تعداد مماس مشترک های خارجی	۲	۲	۲	۱	۰

مماس مشترک خارجی



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

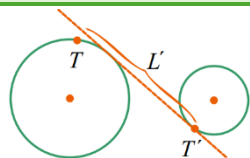
مثال:

اگر طول خط مرکزین دو دایره به شعاع ۷ و ۲۳ برابر ۳۴ باشد، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را بدست آورید.

$$TT' = \sqrt{34^2 - (23 - 7)^2} = \sqrt{900} = 30$$

پاسخ:

مماس مشترک داخلی



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

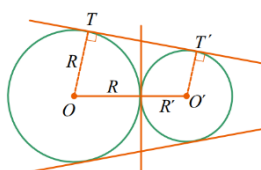
مثال:

اگر طول خط مرکزین دو دایره به شعاع ۵ و ۱۰ برابر ۱۷ باشد، طول مماس مشترک داخلی این دو دایره را بدست آورید.

$$TT' = \sqrt{17^2 - (10 + 5)^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$$

پاسخ:

مماس مشترک خارج دو دایره مماس خارج



$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

مثال:

دو دایره به شعاع های ۲ و ۸ دارای سه مماس مشترک هستند، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را بدست آورید.

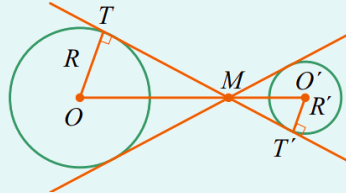
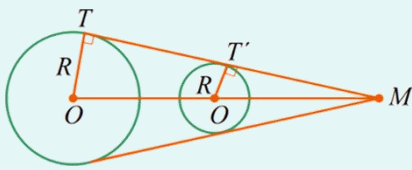
پاسخ: چون دو دایره سه مماس مشترک دارند پس مماس خارج هستند.

$$TT' = 2\sqrt{2 \times 8} = 8$$



همرسی مماس مشترک های دو دایره و خط المרכזین :

اگر شعاع های دو دایره نابرابر باشند، آن گاه مماس مشترک های خارجی و خط المרכזین دو دایره همرس اند. همچنین مماس مشترک های داخلی و خط المרכזین دو دایره همرس اند. نقطه همرسی مشترک های خارجی یا داخلی و خط المרכזین، دو دایره را به نسبت شعاع تقسیم می کند.



$$\frac{OM}{O'M} = \frac{R}{R'}$$

تعریف ها و جملات مهم

مماس مشترک دو دایره: هر خطی یا پاره خطی را که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره می نامند.

دو دایره مماس: دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، **مماس** می نامند.

در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است.

* اگر مرکزهای دو دایره در یک طرف این مماس باشند، آن دو دایره، **مماس بیرونی** است.

* اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنهارا **مماس درونی** می نامند.

چند ضلعی های محاطی و محیطی

چند ضلعی محیطی	چند ضلعی محاطی
چند ضلعی را محیطی می گوئیم اگر فقط آن دایره ای باشد که بر همه اضلاع آن مماس باشد، در این صورت دایره را دایره محاطی آن چند ضلعی می نامیم.	چند ضلعی را محاطی می گوئیم اگر فقط آن دایره ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد، در این صورت دایره را دایره محیطی آن چند ضلعی می نامیم.
نتیجه: یک چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای داخلی همه زاویه های آن در یک نقطه هم رس باشند.	نتیجه: یک چند ضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر عمود منصف های همه ضلع های آن در یک نقطه هم رس باشند.

نکته: اگر مساحت چند ضلعی محیطی برابر S ، محیط آن $2p$ و شعاع دایره محاطی آن r باشد، آن گاه $S = rp$

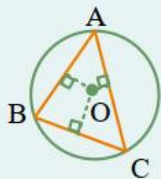
مثال:

یک ۵ ضلعی محدب بر دایره ای به شعاع ۳ محیط شده است. اگر اندازه محیط این ۵ ضلعی برابر با ۲۴ باشد، مساحت آن چقدر است؟ پاسخ:

$$2p = 24 \Rightarrow p = 12, \quad S = rp = 3 \times 12 = 36$$

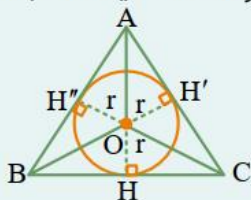
دایره های محیطی و محاطی مثلث:

الف) عمود منصف های اضلاع هر مثلث هم رس اند و نقطه هم رسی عمود منصف ها تنها نقطه ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است، پس اگر دایره ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می گذرد، یعنی دایره محیطی مثلث است.



ب) نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم رس اند و نقطه هم رسی نیمسازها از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است. مرکز دایره محاطی داخلی مثلث، نقطه هم رسی سه نیمساز است و شعاع دایره که با r نمایش داده می شود، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع مثلث است. اگر S مساحت و p نصف محیط مثلث باشد، شعاع

$$\text{دایره محاطی داخلی مثلث از رابطه } r = \frac{S}{p} \text{ محاسبه می شود.}$$



$$r = \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{نصف محیط مثلث}} = \frac{S}{p}$$

مثال :

در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۳ و ۴ واحد، شعاع دایره محاطی داخلی چقدر است؟
پاسخ :

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6, \quad x^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow x = 5, \quad 2p = 3 + 4 + 5 \Rightarrow p = 6, \quad r = \frac{S}{p} = \frac{1}{1} = 1$$

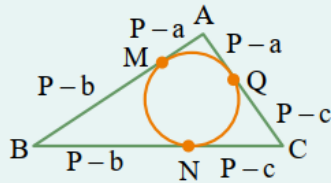
نکته طلایی

طول قطعاتی که دایره محاطی روی اضلاع مثلث می سازد، از روابط زیر به دست می آیند:

$$AM = AQ = P - a$$

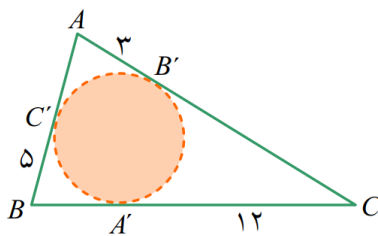
$$BM = BN = P - b$$

$$CN = CQ = P - c$$



مثال :

در شکل مقابل با توجه به اندازه های داده شده، شعاع دایره محاطی چقدر است؟
پاسخ :

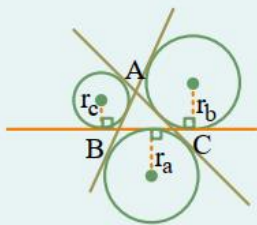


$$AB' = AC' = 3, \quad BA' = BC' = 5, \quad CA' = CB' = 12$$

$$p = \frac{8 + 15 + 17}{2} = 20, \quad S = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60, \quad r = \frac{S}{p} = \frac{60}{20} = 3$$

نکته طلایی

هر مثلث مطابق شکل، سه دایره محاطی خارجی دارد، اگر p نصف محیط مثلث باشد، شعاع این دایره ها به صورت های زیر به دست می آید:



$$r_a = \frac{S}{P - a}, \quad r_b = \frac{S}{P - b}, \quad r_c = \frac{S}{P - c}$$

مثال :

در مثلث متساوی الاضلاع به مساحت $4\sqrt{3}$ ، شعاع دایره محاطی خارجی چقدر است؟

پاسخ : می دانیم مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ داریم :

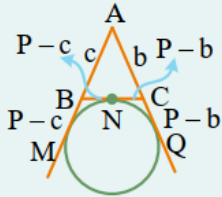
$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$2p = 4 + 4 + 4 \Rightarrow p = 6, \quad r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{4\sqrt{3}}{6 - 4} = 2\sqrt{3}$$



نکته طلایی

در مثلث ABC، طول قطعاتی که دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC روی این ضلع و امتداد دو ضلع دیگر می‌سازد، از روابط زیر به دست می‌آیند:



$$BM = BN = P - c$$

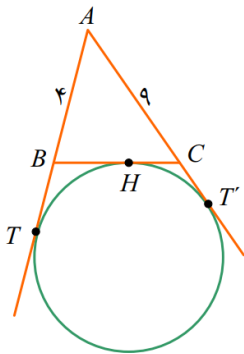
$$CN = CQ = P - b$$

$$AM = AQ = P$$

مثال:

در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۷، ۹ دایره محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه تماس، ضلع متوسط را به دو قسمت تقسیم کرده است. اندازه قطعه بزرگتر را بدست آورید.

پاسخ: فاصله راس A تا نقاط تماس با نصف محیط مثلث برابر است. پس

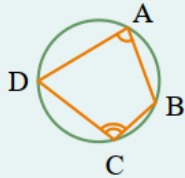


$$AT' = AT = \frac{9 + 7 + 4}{2} = 10 \Rightarrow P = 10$$

$$\begin{cases} BT = 10 - 4 = 6 \Rightarrow BH = BT = 6 \\ CT' = 10 - 9 = 1 \Rightarrow CH = CT' = 1 \end{cases}$$

چهارضلعی محاطی:

یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر هر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{چهارضلعی } ABCD \text{ محاطی است.}$$

توجه:

بین چهارضلعی‌های معروف، مربع، مستطیل و دوزنقه متساوی‌الساقین همواره محاطی‌اند.

مثال:

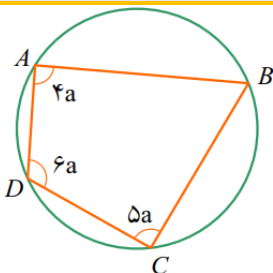
در شکل مقابل، اندازه زاویه $\hat{B}$ چند درجه است؟

پاسخ: چهار ضلعی ABCD محاطی است. داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

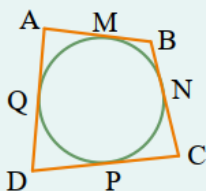
$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 4\alpha + 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + 6\alpha = \hat{B} + 6(20^\circ) = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$



چهارضلعی محیطی:

یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد، بنابراین، در شکل روبه‌رو داریم:



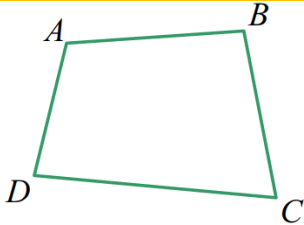
$$AB + DC = AD + BC \Leftrightarrow \text{چهارضلعی } ABCD \text{ محیطی است.}$$



توجه:

بین چهارضلعی های معروف، مربع، لوزی و کایت همواره محیطی اند.

مثال:

در چهارضلعی محیطی $ABCD$ ، $AB = ۸$ و $CD = ۱۲$ است. محیط چهارضلعی را بدست آورید.

$$AB + CD = BC + DA$$

پاسخ: چهارضلعی محیطی است پس داریم:

$$۸ + ۱۲ = BC + DA \Rightarrow BC + DA = ۲۰$$

$$P = AB + CD + BC + DA = ۸ + ۱۲ + ۲۰ = ۴۰$$

تعریف ها و جملات مهم

چند ضلعی منتظم: یک چند ضلعی محدب را منتظم می نامند، هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند.

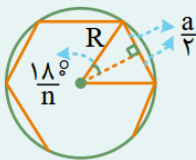
* هر چند ضلعی منتظم، هم محاطی هم محیطی است.

* دوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

محاطی و محیطی بودن چهارضلعی ها در یک نگاه

کایت	دوزنقه متساوی الساقین	دوزنقه	متوازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
×	✓	×	×	×	✓	✓	محاطی
✓	×	×	×	✓	×	✓	محیطی

نکته طلایی

اگر n ضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S درون دایره به شعاع R محاط شده باشد، آن گاه:

$$a = 2R \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$S = n \left(\frac{1}{2} \times R \times R \times \sin \frac{360^\circ}{n} \right)$$

مثال:

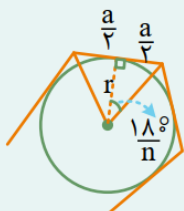
شش ضلعی منتظم در دایره ای به شعاع $\sqrt{2}$ محاط شده است، طول یک ضلع و مساحت شش ضلعی را محاسبه کنید.

$$a = 2 \times \sqrt{2} \times \sin\left(\frac{180^\circ}{6}\right) = 2\sqrt{2} \sin(30^\circ) = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

پاسخ:

$$S = 6 \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin\left(\frac{360^\circ}{6}\right) \right) = 6 \times \sin(60^\circ) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

نکته طلایی

اگر n ضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S بر دایره ای به شعاع r محیط شده باشد، آن گاه:

$$a = 2r \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$S = n \left(\frac{r \cdot a}{2} \right)$$



مثال:

طول یک ضلع و مساحت شش ضلعی منتظم محیط بر دایره ای به شعاع $r = 3$ را محاسبه کنید.

$$a = 2 \times 3 \times \tan\left(\frac{180^\circ}{6}\right) = 6 \tan(30^\circ) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

پاسخ:

$$S = 6 \left(\frac{3 \times 2\sqrt{3}}{2} \right) = 6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

رابطه بین شعاع های سه دایره محاطی خارجی و داخلی مثلث

اگر h_a, h_b, h_c سه ارتفاع مثلث و r_a, r_b, r_c شعاع های دایره محاطی خارجی و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد. آنگاه:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

،

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

مثال:

۱- اندازه های سه ارتفاع مثلث برابر ۳، ۴، ۶ است. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث چقدر است؟

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

پاسخ:

۲- شعاع های دایره محاطی خارجی در مثلثی برابر با ۵، ۱۲، ۲۰ است. اندازه شعاع دایره محاطی داخلی در این مثلث چقدر است؟

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = 3$$

پاسخ:



تبدیل های هندسی

درس اول

تبدیل و ویژگی های آن ها:

تبدیل ها می توانند موقعیت (جایگاه شکل در صفحه) یا اندازه شکل را تغییر دهند.

به تبدیل های بازتاب، دوران و تجانس تبدیل های هندسی می گوئیم.

تبدیل: تبدیل T در صفحه P ، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P ، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می کند و برعکس. هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است.

طولپایی (ایزومتري): تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتري) می نامند. به عبارتی اگر داشته باشیم $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، $AB = A'B'$ آن گاه داریم:

نقطه ثابت تبدیل: در هر تبدیل، نقطه ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می شود، نقطه ثابت تبدیل می نامند.

تبدیل همانی: تبدیل T را تبدیل همانی گوئیم، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم: $T(A) = A$

ویژگی های بازتاب نسبت به خط

ویژگی های بازتاب نسبت به خط

بازتاب نسبت به خط، ایزومتري است، یعنی پاره خط و تبدیل یافته اش، هم اندازه اند.

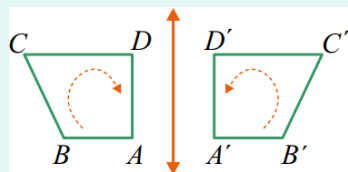
بازتاب شیب خط را لزوماً حفظ نمی کند، بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می کند که خط موازی با محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.

بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند.

در بازتاب، اندازه زاویه ها ثابت می ماند.

در بازتاب نسبت به یک خط، شکل و تصویرش با هم همنهشت هستند.

اگر A' تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d باشد، نقطه A نیز تصویر نقطه A' تحت بازتاب نسبت به خط d محسوب می شود، یعنی اگر S یک تبدیل بازتاب باشد و داشته باشیم $S(A) = A'$ آنگاه $S(A') = A$ خواهد بود.



$ABCD$ ساعتگرد و $A'B'C'D'$ پادساعتگرد

بازتاب بی شمار نقطه ثابت تبدیل دارد. ویژگی های انتقال

ویژگی های انتقال

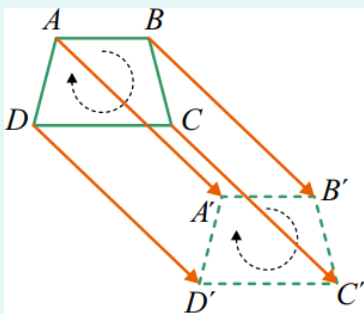
۱) انتقال طولپا (ایزومتري) است.

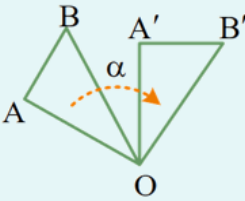
۲) انتقال شیب خط را حفظ می کند.

۳) انتقال جهت شکل را حفظ می کند.

۴) در انتقال، اندازه زاویه ثابت می ماند.

۵) یک شکل و انتقال یافته اش همواره همنهشت هستند.



	ویژگی های دوران
	۱ دوران طول یا (ایزومتري) است. یعنی طول پاره خط را حفظ می کند.
	۲ دوران شیب خط را حفظ نمی کند مگر آن که α مضرب صحیحی از ۱۸۰° باشد.
	۳ دوران جهت شکل را حفظ می کند.
	۴ در دوران، اندازه زاویه ثابت می ماند.
	۵ یک شکل و دوران یافته اش همواره همنهشت هستند.
	۶ مرکز دوران محل برخورد عمود منصف های AA' و BB' است. اگر زاویه بین AA' و BB' برابر α باشد، زاویه دوران α یا $۱۸۰^\circ - \alpha$ است.
	۷ مرکز دوران روی عمود منصف پاره خطی قرار دارد که نقطه و تصویرش را به هم وصل می کند.

تعریف ها و جملات مهم

تعریف انتقال: انتقال T تحت بردار $\vec{V}$ ، تبدیلی است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P نقطه ای مانند A' در همان صفحه است که

$$AA' = \vec{V}$$

تعریف دوران: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

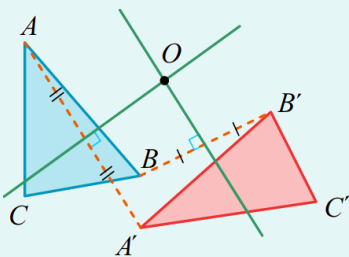
$$OA = OA' \text{ و } \widehat{AOA'} = \alpha$$

* تبدیل یک تابع یک به یک است.

* تبدل هایی توانند موقعیت یا اندازه یا جهت شکل را عوض کنند.

* اگر T تبدیل ایزومتري باشد، آنگاه هر شکل با تصویرش هم نهشت خواهد بود.

مرکز دوران محل برخورد عمود منصف های AA' و BB' است و اگر زاویه بین AA' و BB' برابر



ویژگی های تجانس

۱) تجانس در حالت کلی طول یا (ایزومتري) نیست. به جز حالتی که $k = \pm 1$ باشد.

۲) تجانس در حالتی که $|k| = 1$ است، طولیابا و در بقیه حالت های $|k| \neq 1$ ، طولیابا (ایزومتري) نیست.

۳) تجانس شیب خط و جهت شکل را حفظ می کند.

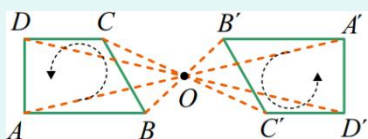
۴) در تجانس، اندازه زاویه ثابت می ماند.

۵) شکل و مجانس آن باهم متشابه اند و نسبت تشابه در دو شکل برابر $|k|$ است.

۶) تجانس طول و محیط را به نسبت k و مساحت را به نسبت k^2 تغییر می دهد.

۷) در تجانس، خط هایی که هر نقطه را به مجانس آن وصل می کنند، در مرکز تجانس هم رسند و همگی از مرکز تجانس می گذرند.

۸) مجانس هر پاره خط، پاره خطی موازی و به اندازه $|k|$ برابر پاره خط اولیه است.



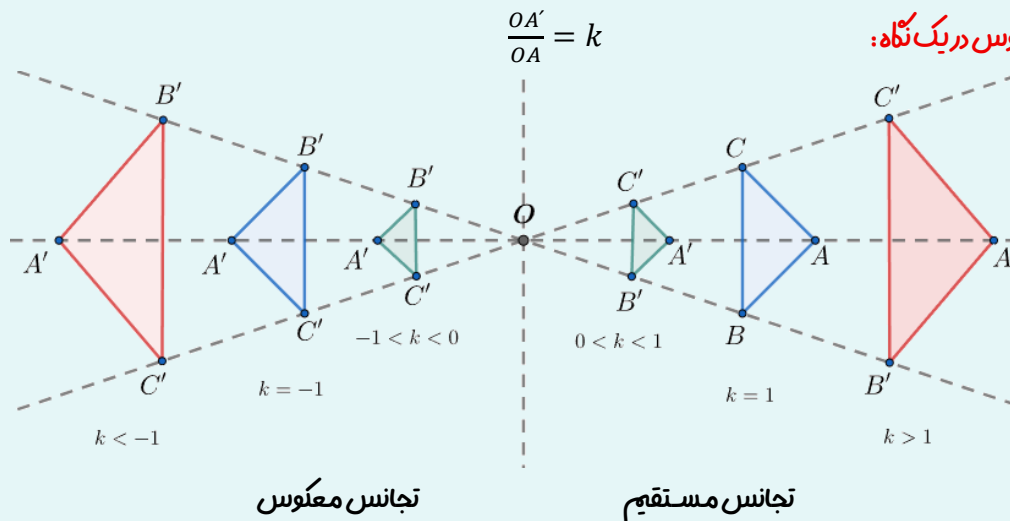
پاره ساعتگرد $ABCD$

و $A'B'C'D'$ پاره ساعتگرد

نکته طلایی: در تجانس به مرکز O و نسبت k :

- اگر $k > 0$ باشد، تجانس مستقیم می گوئیم. در این حالت شکل و تصویرش در یک طرف O قرار می گیرند.
- اگر $k < 0$ باشد، تجانس معکوس می گوئیم. در این حالت نقطه O بین شکل و تصویرش قرار می گیرد.
- اگر $|k| < 1$ باشد، انقباض می نامیم و تصویر شکل کوچک تر می شود.
- اگر $|k| > 1$ باشد، انبساط می نامیم و تصویر شکل بزرگ تر می شود.

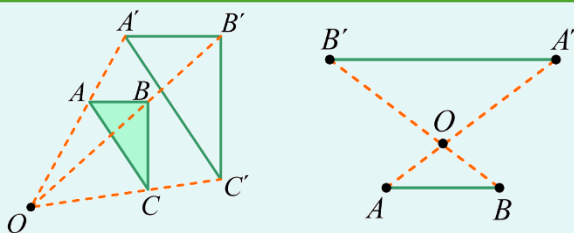
تجانس مستقیم و معکوس در یک نگاه:



ترکیب تبدیل ها

	ترکیب دو انتقال ترکیب دو انتقال با بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ انتقالی است با بردار $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$	
	ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، انتقالی است با بردار دو برابر فاصله دو محور بازتاب و عمود بر آن ها $AH = A'H$, $A'H' = A'H'$ $\overrightarrow{AA''} = 2\vec{l}$	ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط موازی d_1 و d_2
	ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، دورانی است به مرکز محل تلاقی دو محور و زاویه بین آن ها: $\widehat{AOA''} = 2\alpha = 2(\beta + \theta)$ $OA = OA''$	ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط متقاطع d_1 و d_2
	ترکیب دو بازتاب با محورهای عمود بر هم، یک دوران 180° یا یک تجانس معکوس با $k = -1$ به مرکز محل برخورد دو محور است. $OA = OA''$	ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط عمود بر هم d_1 و d_2

یافتن مرکز تجانس: در تجانس خطوطی که نقطه و مجانسش را به هم وصل می کنند در مرکز تجانس هم رس اند بنابراین برای بدست آوردن مرکز تجانس، کافی است نقطه هم رسی خطوطی که گذرنده از هر نقطه از شکل و مجانسش هستند را پیدا کنیم.



نقشه ثابت تبدیل های مشهور

۱ در دوران، مرکز دوران نقطه ثابت تبدیل محسوب می شود.

۲ انتقال در حالت کلی نقطه ثابت تبدیل ندارد.

۳ در تبدیل بازتاب، تمام نقاط واقع بر محور بازتاب، نقطه ثابت هستند پس بازتاب بیشمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

۴ در تبدیل همانی، تمام نقاط صفحه، نقطه ثابت تبدیل هستند.

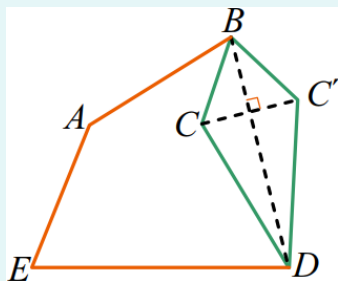
۵ در تجانس، مرکز تجانس نقطه ثابت تبدیل محسوب می شود.

کاربرد تبدیل ها

درس دوم

کاربردهایی از بازتاب (قرینه یابی)

مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی

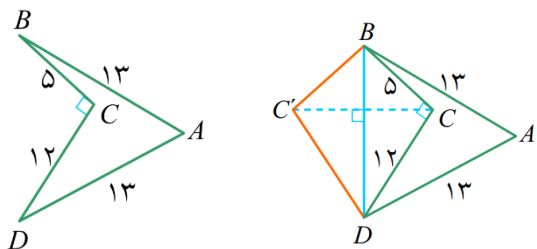


در این گونه مسائل، هدف این است بدون اینکه محیط یک چند ضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.

برای این کار مطابق شکل روی روبه سراخ زاویه های بزرگتر از ۱۸۰° می رویم و با کمک بازتاب نسبت به خط BD ، نقطه C' را پیدا می کنیم که محیط $ABCDE$ و $ABC'DE$ یکسان است، ولی مساحت $ABC'DE$ افزایش پیدا کرده است.

مثال:

می خواهیم بدون تغییر در تعداد اضلاع و طول اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ ، مساحت آن را تا حد امکان افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت جدید را حساب کنید.

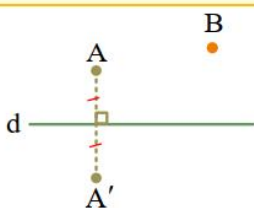


پاسخ:
$$افزایش مساحت = 2S_{ADC} = 2\left(\frac{1}{2} \times 5 \times 12\right) = 60$$

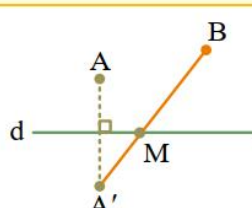
مسائل پیدا کردن کوتاه ترین مسیر:

مثال:

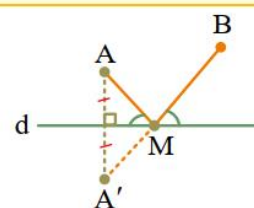
در شکل مقابل، نقطه M را روی خط d طوری پیدا کنید که طول $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. (مسئله هرون)



مرحله ۱: بازتاب یکی از نقطه ها را نسبت به خط d می یابیم. (نقطه A' بازتاب نقطه A نسبت خط d است).



مرحله ۲: از نقطه A' به نقطه B وصل می کنیم تا خط d را در نقطه M قطع کند.

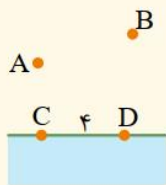


مرحله ۳: مسیر AMB کوتاه ترین مسیر ممکن است.



مثال:

دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

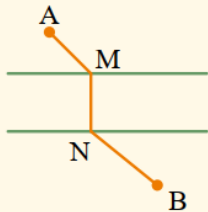


مرحله ۱: بازتاب نقطه A نسبت به رودخانه را A' می نامیم. از نقطه B به اندازه ۴ کیلومتر، موازی با رودخانه، به طرف A حرکت می کنیم تا به نقطه B' برسیم (انتقال)	مرحله ۲: از نقطه A' به نقطه B' وصل می کنیم تا ساحل بالایی رودخانه را در نقطه C قطع کند.	مرحله ۳: از نقطه C به اندازه ۴ کیلومتر در ساحل رودخانه و به سمت B، حرکت می کنیم، تا نقطه D به دست آید.	مرحله ۴: مسیر مورد نظر، همان مسیر ACDB است.



مثال:

دو شهر A و B دو طرف رودخانه ای قرار دارند. چگونه می توان جاده ای از A به B ساخت، به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود گردد و مسیر AMNB کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟



مرحله ۱: نقطه B را به اندازه عرض رودخانه، در راستای عمود بر رودخانه، انتقال می دهیم تا نقطه B' به دست آید.	مرحله ۲: از نقطه B' به نقطه A وصل می کنیم تا کناره بالایی رودخانه را در نقطه M قطع کند.	مرحله ۳: از نقطه M عمودی بر کناره دیگر رودخانه رسم می کنیم تا نقطه N مشخص شود.	مرحله ۴: مسیر AMNB، مسیر مورد نظر است.



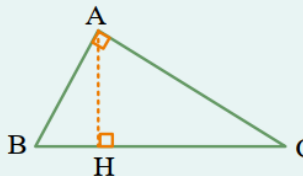
قضیه سینوس ها

درس اول

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه:

$$AH^2 = BH \times HC$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

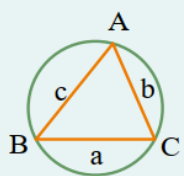


$$AB^2 = BC \times BH$$

$$AC^2 = BC \times CH$$

قضیه سینوس ها:

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه روی آن برابر است با قطر دایره محیطی مثلث. به عبارت دیگر در مثلث ABC، همواره:



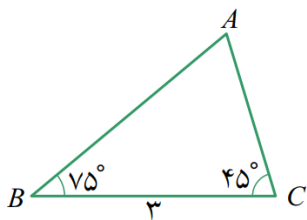
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow a = 2R \sin \hat{A}, b = 2R \sin \hat{B}, c = 2R \sin \hat{C}$$

(R شعاع دایره محیطی مثلث است.)

مثال:

در مثلث ABC اگر $\hat{C} = 45^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$, $BC = 3$ طول ضلع AB چقدر است؟

پاسخ:



$$\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ \Rightarrow \frac{BC}{\sin(60^\circ)} = \frac{AB}{\sin(45^\circ)} \Rightarrow \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{6}$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

نتیجه قضیه سینوس ها: یکی از نتایج قضیه سینوس ها این است که در هر مثلث نسبت اضلاع

بنا نسبت سینوس زاویه مقابل به آن ها برابر است.

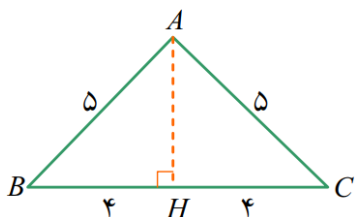
نکته: اگر a, b, c اضلاع مثلث و S مساحت مثلث باشد، شعاع دایره محیطی مثلث (R) از رابطه زیر نیز بدست می آید:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

مثال:

در مثلثی با اضلاع ۵، ۵، ۸ شعاع دایره محیطی چقدر است؟

پاسخ:



$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, S = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

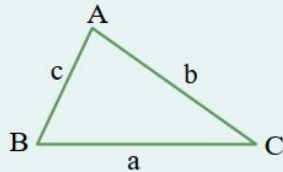
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \times 5 \times 8}{4 \times 12} = \frac{25}{6}$$

قضیه کسینوس ها

درس دوم

قضیه کسینوس ها:

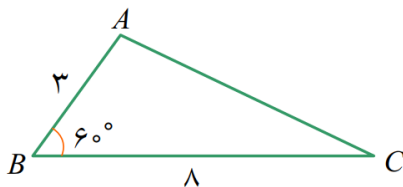
در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع های اندازه های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها.



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos \hat{C} \end{cases}$$

مثال:

در شکل زیر طول پاره خط AC را بدست آورید.



$$AC^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos(60^\circ)$$

پاسخ:

$$AC^2 = 9 + 64 - 2 \times 24 \times \frac{1}{2} = 49 \Rightarrow AC = 7$$

مثال:

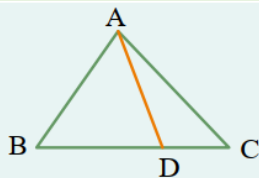
در مثلثی به طول اضلاع $\sqrt{7}, 3, 1$ زاویه متوسط مثلث چند درجه است؟

پاسخ: زاویه متوسط رو به ضلع متوسط قرار دارد. در این مثلث ضلع به طول $\sqrt{7}$ ضلع متوسط است.

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos \theta \Rightarrow 7 = 10 - 6 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

قضیه استوارت:

در مثلث ABC ، اگر نقطه دلخواه D روی ضلع BC قرار داشته باشد، آنگاه داریم:



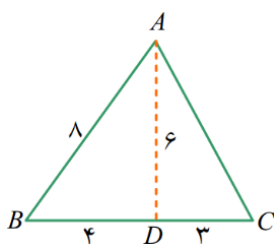
$$AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times CD \times BC = BC(AD^2 + BD \times CD)$$

$$AD^2 = \frac{AB^2 \times DC + AC^2 \times BD}{DC + BD} - DC \times BD$$

فرمول قضیه استوارت به شکلی ساده تر:

مثال:

در شکل مقابل طول ضلع AC را بدست آورید.



$$6^2 = \frac{AC^2 \times 4 + 4^2 \times 3}{4 + 3} - (4 \times 3) \Rightarrow 6^2 = \frac{AC^2 \times 4 + 192}{7} - 12$$

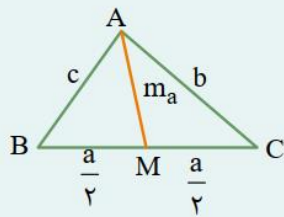
پاسخ:

$$36 + 12 = \frac{AC^2 \times 4 + 192}{7} \Rightarrow 4AC^2 + 192 = 48 \times 7 \Rightarrow 4AC^2 + 192 = 336$$

$$\Rightarrow 4AC^2 = 144 \Rightarrow AC^2 = 36 \Rightarrow AC = 6$$

قضیه میانه ها:

در هر مثلث، مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانه نظیر ضلع سوم به علاوه نصف مربع ضلع سوم. به عنوان مثال در مثلث ABC داریم:



$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \end{cases}$$

در قضیه میانه، اگر طول میانه را تنها کنیم به رابطه های زیر می رسیم:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

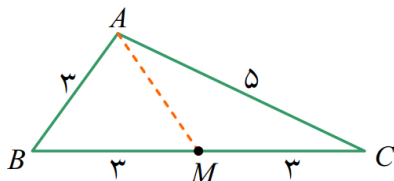
$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

مثال:

در مثلثی با اضلاع ۳، ۵، ۶ طول کوتاهترین میانه را بدست آورید.

پاسخ: کوتاهترین میانه بر بزرگترین ضلع وارد می شود.



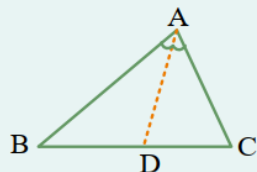
$$m_a^2 = \frac{2 \times 3^2 + 2 \times 5^2 - 6^2}{4} = \frac{18 + 50 - 36}{4} = 8 \Rightarrow m_a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

درس سوم

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی:

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های دو ضلع دیگر مثلث تقسیم می کند.



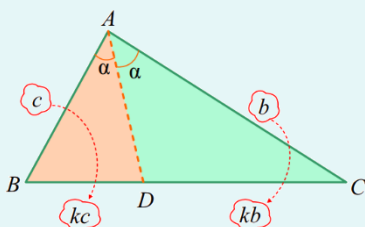
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{یا}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{kc}{kb}$$

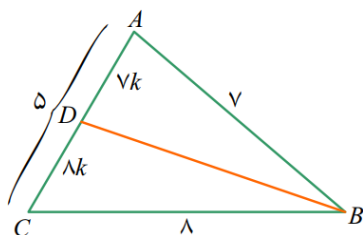
قضیه نیمسازها به زبان ساده:

در حل مسئله ها، طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز را بر حسب طول اضلاع کناری روی شکل وارد کنید.

سپس مجموع آنها را بر طول ضلع قرار دهید تا k و نتیجه طول قطعات پیدا شود.



مثال ۷:



در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 5$ ، $BC = 8$ است. طول دو قطعه‌ای را بدست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

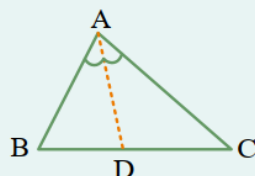
پاسخ:

$$7k + 8k = 5 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$AD = 7k = 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \quad DC = 8k = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث:

در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع آن زاویه منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



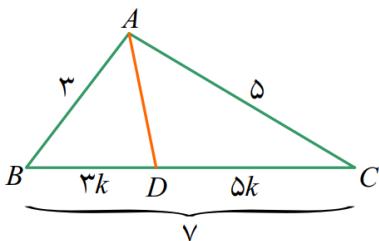
$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$

← حاصل ضرب اضلاع → حاصل ضرب قطعه‌ها

مثال ۷:

در مثلث ABC ، $AB = 3$ ، $AC = 5$ ، $BC = 7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

پاسخ:



$$3k + 5k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{8}, \quad AD^2 = 3 \times 5 - 3k \times 5k = 15 - 15k^2 = 15(1 - k^2)$$

$$\Rightarrow 15\left(1 - \frac{49}{64}\right) = 15 \times \frac{15}{64} = \frac{225}{64} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$

قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

درس چهارم

قضیه هرون:

اگر a ، b و c طول اضلاع مثلث و $P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطه زیر که رابطه هرون نامیده می‌شود، به دست می‌آید:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال ۷:

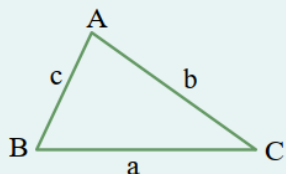
مساحت مثلثی با اضلاع 12 ، 9 ، 7 را بدست آورید.

پاسخ:

$$p = \frac{12+9+7}{2} = 14, \quad S = \sqrt{14(14-12)(14-9)(14-7)} = \sqrt{14 \times 2 \times 5 \times 7} = 14\sqrt{5}$$

مساحت مثلث به کمک نسبت های مثلثاتی:

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه های دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع:



$$S = \frac{1}{2} b.c \sin \hat{A} = \frac{1}{2} a.c \sin \hat{B} = \frac{1}{2} a.b \sin \hat{C}$$

نکته: اگر طول سه ضلع مثلث معلوم باشد و اندازه یکی از ارتفاع ها خواسته شده باشد، ابتدا مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون یاروش های دیگر حساب می کنیم و سپس اندازه هر ارتفاع را از رابطه های زیر بدست می آوریم:

$$S = \frac{1}{2} h_a \times a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

$$S = \frac{1}{2} h_b \times b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b}$$

$$S = \frac{1}{2} h_c \times c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c}$$

دقت کنید: بلندترین ارتفاع بر کوتاهترین ضلع،

کوتاهترین ارتفاع بر بلندترین ضلع،

ارتفاع متوسط بر ضلع متوسط وارد می شود.

مثال:

در مثلثی با اضلاع ۵، ۶، ۷ طول بلندترین ارتفاع را بدست آورید.

$$p = \frac{5+6+7}{2} = 9, S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

پاسخ:

$$\frac{1}{2} h_a \times 5 = 6\sqrt{6} \Rightarrow h_a = \frac{12\sqrt{6}}{5}$$

بلندترین ارتفاع بر کوتاهترین ضلع وارد می شود.

در مثلث ABC، اگر شعاع دایره محاطی داخلی، r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC (در بیرون به راس A) و R شعاع دایره محیطی باشد داریم:

$$r = \frac{S}{p} \text{ محاطی داخلی}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} \text{ محاطی خارجی}$$

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ محیطی}$$

مثال:

مثلثی ABC با اضلاع ۴، ۵، ۷ را در نظر بگیرید. موارد خواسته شده را بدست آورید.

پ: شعاع دایره محیطی مثلث

ب: شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع ۵

الف: شعاع دایره محاطی داخلی

$$p = \frac{4+5+7}{2} = 8, S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = 4\sqrt{6}$$

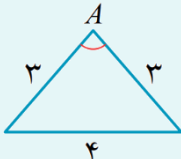
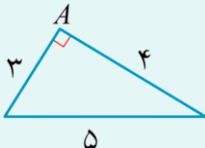
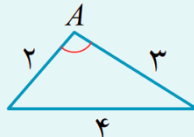
پاسخ:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \times 4 \times 7}{4 \times 4\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} \quad \text{پ:}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{4\sqrt{6}}{8-5} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \quad \text{ب:}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{الف:}$$

نکته: یکی از نتیجه های مهم قضیه کسینوس ها تشخیص نوع مثلث می باشد و طبق جدول زیر داریم:

حاله	قائم الزاویه	منفرجه
$\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos \hat{A} > 0$	$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos \hat{A} = 0$	$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos \hat{A} < 0$
$a^2 < b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 > b^2 + c^2$
		
$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$	$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$	$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$